ΒΑΣΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 (ΜΙΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ)

Ο κατασκευαστής ενός οργάνου ακριβείας ισχυρίζεται ότι η τυπική απόκλιση των μετρήσεων που γίνονται με το όργανο είναι $\sigma=2$. Αν σε ένα πείραμα πάραμε τις μετρήσεις 4.2, 5.3, 10.3. Αληθεύει ο ισχυρισμός του κατασκευαστή; ($\alpha=5\%$). Έπειτα, νβ. ένα Δ.Ε 95% για το σ.

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε (τον εκτιμητή του σ^2) τη διακύμανση S^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{3-1}\left[(4,2-19,8)^2+(5.3-19,8)^2+(10.3-19.8)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 21,14 = 10,57.$$

Θεωρούμε $H_0: \sigma=2$ και $H_a: \sigma\neq 2$

(ο ισχυρισμός του κατασκευαστή)

Έπειτα ορίζουμε το στατιστικό (ή τη στατιστική συνάρτηση):

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{2\cdot 10.57}{4} = 5,285.$$

Ορίζουμε την κρίσιμη περιοχή (ή περιοχή απόρριψης).

$$C = (0, \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}) \cup (\chi^2_{\alpha/2,n-1}, +\infty) = (0, \chi^2_{0,975,2}) \cup (\chi^2_{0,025,2}, +\infty) =$$

$$= (0, 0,0506) \cup (7,378, +\infty)$$

$\chi^2 \notin C$. Άρα, η H_0 δεν απορρίπτεται σε ένα 5% επίπεδο σημαντικότητας.

Έπειτα, ένα Δ.Ε 95% για το σ^2 είναι

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$$ άρα για το σ θα είναι:

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right) = \left(\sqrt{2,87}, \sqrt{41,77}\right) = (1,69, 6,46).$$

ΒΑΣΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (ΔΥΟ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ)

Δυο πειραματιστές πήραν, για ένα πείραμα που εκτέλεσαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

$\bar{x}_1 = 13{,}4$	$S_1^2 = 49{,}54$	$n_1 = 12$
$\bar{x}_2 = 36$	$S_2^2 = 456{,}89$	$n_2 = 10$

Ισχύει ο ισχυρισμός ότι $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0{,}01$;

ΛΥΣΗ

Ορίζουμε την Μηδενική Υπόθεση $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$ και ως Εναλλακτική Υπόθεση $H_a: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Ενώ παράλληλα θεωρούμε ως κρίσιμη περιοχή την $C = \left\{ F = \frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-a} \right\}$

$$F = 0{,}1084 \quad \text{ενώ} \quad F_{n_1-1,\, n_2-1,\, 1-a} = F_{11,9,0{,}99} = \frac{1}{F_{9,11,0{,}01}} = 0{,}216$$

Παρατηρούμε, ότι $F < F_{11,9,0{,}99}$

Δηλ. $F \in C$ → Άρα, η H_0 θα απορριφθεί

Άρα, σαφώς το 2^o αποτέλεσμα (ή Δείγμα) είναι πιο αποτελεσματικό από το 1^o (ή πιο ομοιογενές από το 1^o)